Nom : ______________________________________ Groupe : _______

Vision 3 – Les fonctions exponentielle et logarithmique

A) Notation exponentielle et lois des exposants

L'exponentiation est l'opération qui consiste à affecter une base d'un exposant afin d'obtenir une puissance : $base^{exposant} = puissance$.

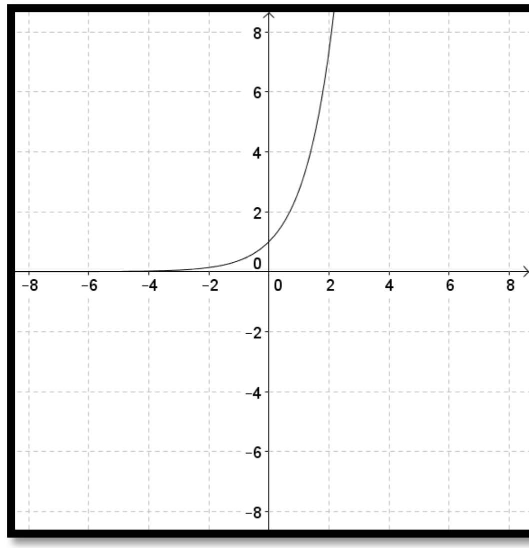
Exemple : Dans l'expression $7^4 = 2401$, la base est 7, l'exposant est 4 et la puissance est 2401.

Notation et signification	**Exemple**
Pour une base $\boldsymbol{a}$ et un exposant entier $\boldsymbol{m > 1}$: $$\boldsymbol{a^m = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a \times a}_{m\ fois}}$$ L'exposant $\boldsymbol{m}$ indique le nombre de fois que la base $\boldsymbol{a}$ apparait comme facteur dans un produit.	$6^5 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$
Pour une base $\boldsymbol{a}$ et l'exposant 1 : $$\boldsymbol{a^1 = a}$$	$3{,}45^1 = 3{,}45$
Pour une base $\boldsymbol{a \neq 0}$ et l'exposant 0 : $$\boldsymbol{a^0 = 1}$$	$398^0 = 1$
Pour une base $\boldsymbol{a \neq 0}$ et un exposant entier $\boldsymbol{m \geq 0}$: $$\boldsymbol{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$	$5^{-7} = \frac{1}{5^7} = \frac{1}{78125}$
Pour une base $\boldsymbol{a \geq 0}$ et l'exposant $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$: $$\boldsymbol{a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}}$$	$81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$
Pour une base $\boldsymbol{a \geq 0}$ et l'exposant $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$: $$\boldsymbol{a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}}$$	$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Les lois des exposants permettent d'effectuer des opérations faisant intervenir des expressions écrites sous la forme exponentielle.

Loi	**Exemple**
Produit de puissances Pour $\boldsymbol{a \neq 0}$: $\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$	$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
Quotient de puissances Pour $\boldsymbol{a \neq 0}$: $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$	$\frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = 9$
Puissance d'un produit Pour $\boldsymbol{a \neq 0}$ et $\boldsymbol{b \neq 0}$: $\boldsymbol{(ab)^m = a^m b^m}$	$(3 \cdot 5)^4 = 3^4 \cdot 5^4$ $= 81 \cdot 625 = 50625$
Puissance d'une puissance Pour $\boldsymbol{a \neq 0}$: $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$	$(2^3)^4 = 2^{12} = 4096$
Puissance d'un quotient Pour $\boldsymbol{a \neq 0}$ et $\boldsymbol{b \neq 0}$: $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{4^5}{3^5} = \frac{1024}{243} \approx 4{,}21$

B) Fonction exponentielle



Une fonction définie par une règle dans laquelle la variable indépendante apparaît en exposant est appelée fonction exponentielle.

La règle d'une fonction exponentielle peut s'écrire sous la forme $f(x) = ac^{b(x-h)} + k$ où $a \neq 0$, $b \neq 0$ et c $(la\ base)$ est un nombre supérieur à 0 et qui n'est pas égal à 0.

On utilise souvent la constance de Néper, e, comme base de la fonction exponentielle. La valeur de cette constante est d'environ 2,7183.

Toutefois, les lois des exposants permettent de transformer cette règle sous la forme canonique réduite $(x) = ac^x + k$.

La représentation graphique d'une fonction exponentielle sous la forme canonique réduite est une courbe passant par le point dont les coordonnées sont $(0, a + k)$ et dont l'une des extrémités s'approche de plus en plus d'une asymptote d'équation $y = k$.

Exemple :

Soit la fonction $(x) = 9(3)^{2(x-5)} + 7$.

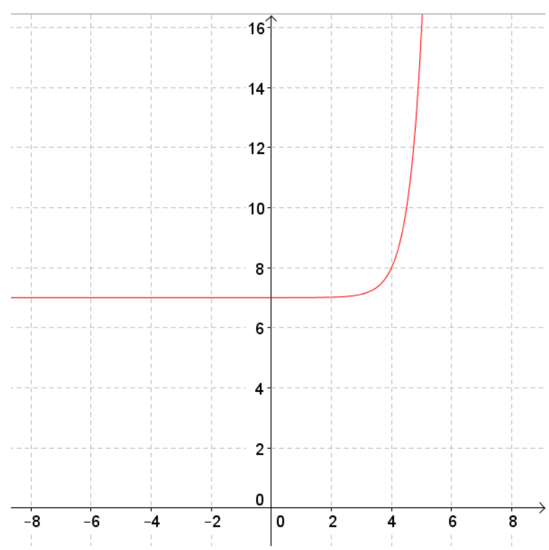
<table>
<tr><th>Règle</th><th>Table de valeurs</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr>
<td>

$$\begin{aligned} f(x) &= 9(3)^{2(x-5)} + 7 \\ &= 9(3^2)^{(x-5)} + 7 \\ &= 9(9)^{(x-5)} + 7 \\ &= 9 \times \frac{(9^x)}{9^5} + 7 \\ &= \frac{(9^x)}{6561} + 7 \end{aligned}$$

</td>
<td>

x	y
-4	≈ 7
-2	≈ 7
0	≈ 7
2	$\approx 7{,}01$
4	8
6	88

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

1) Recherche de la règle d'une fonction exponentielle

Il est possible de déterminer la règle d'une fonction exponentielle sous la forme canonique de la manière suivante.

1. Trouver l'équation de l'asymptote horizontale, l'ordonnée à l'origine de la courbe et les coordonnées d'un point autre que celui associé à l'ordonnée à l'origine.

2. Déterminer la valeur du paramètre k et celle du paramètre a.

3. Substituer les coordonnées du point à x et à f(x) dans la règle $f(x) = ac^x + k$.

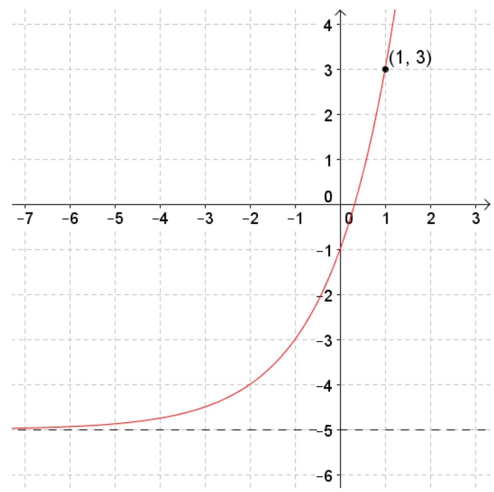
4. Résoudre l'équation formée afin de déterminer la base de la fonction.

5. Écrire la règle de la fonction obtenue.

Exemple :

Soit la représentation graphique suivante :

Trouvez la règle.



1. L'équation de l'asymptote horizontale est $y = -5$, l'ordonnée à l'origine est -1 et la courbe passe par le point (1, 3).

2. Puisque l'équation de l'asymptote horizontale est $y = -5$, on déduit que $k = -5$.

   Puisque l'ordonnée à l'origine est égale à $a + k$, on a :
   $-1 = a - 5$
   $4 = a$

3. Substituer :

$$3 = 4c^1 - 5$$

4. Résoudre :

$$3 = 4c^1 - 5$$
$$8 = 4c$$
$$2 = c$$

5. La règle de la fonction est :

$$f(x) = 4(2)^x - 5$$

2) Résolution d'une équation exponentielle à une variable

Il est possible de résoudre une équation exponentielle à une variable en exprimant chacun des deux membres de l'équation dans une même base. De l'égalité des bases, on peut alors déduire l'égalité des exposants et résoudre l'équation ainsi obtenue.

Exemple :

$$3^{-2x} = 243$$
$$3^{-2x} = 3^5$$
$$\text{donc,}$$
$$-2x = 5$$
$$x = \frac{5}{-2}$$

3) Résolution d'une inéquation exponentielle à une variable

Il est possible de résoudre une inéquation exponentielle à une variable de la façon suivante.

1. Substituer un symbole d'égalité au symbole d'inégalité de l'inéquation.

2. Résoudre l'équation

3. Représenter la solution sur une droite numérique par un point plein ou vide selon que l'équation fait partie ou non de l'inéquation.

4. Déduire l'ensemble solution de l'inéquation.

Exemple :
Résoudre : $8^x > 2^{7x-2}$

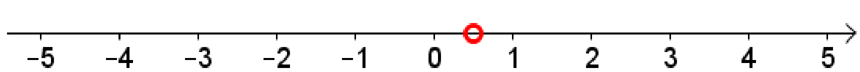
1. Substituer :

$$8^x = 2^{7x-2}$$

2. Résoudre :

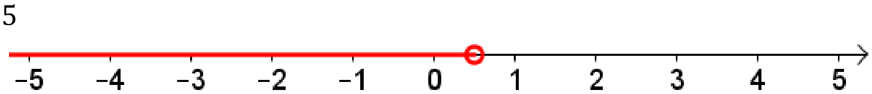
$$8^x = 2^{7x-2}$$
$$(2^3)^x = 2^{7x-2}$$
$$2^{3x} = 2^{7x-2}$$
$$3x = 7x - 2$$
$$-4x = -2$$
$$x = \frac{1}{2}$$

3. Représenter la solution sur une droite



4. Déduire l'ensemble solution :

Sur la droite numérique, les nombres inférieurs à 0,5 vérifient l'inéquation. L'ensemble solution est : $x < 0,5$



C) Logarithme

L'exposant qu'il faut attribuer à une base pour obtenir une puissance donnée est appelé logarithme.
Pour $m > 0$ et une base c supérieure à 0 et différente de 1, l'équivalence qui suit permet de passer d'une forme d'écriture exponentielle à une forme d'écriture logarithmique, et vice versa.

Exemples :

1) $9 = 3^2$ ⇔ $2 = \log_3 9$ *(2 est le logarithme de 9 en base 3)*
2) $15 = 4^n$ ⇔ $n = \log_4 15$ *(n est le logarithme de 15 en base 4)*
3) $17 = 2^{5x}$ ⇔ $5x = \log_2 17$ *(5x est le logarithme de 17 en base 2)*

N.B. De l'équivalence précédente, on peut déduire que pour $c > 0$ et $c \neq 1$, $\log_c 1 = 0$ et $\log_c c = 1$.

Notation :
Parmi les logarithmes, les plus fréquemment utilisés sont le logarithme en base 10, appelé logarithme ______________________, et le logarithme en base e, appelé logarithme ______________________.

Pour cette raison, on omet d'écrire la base d'un logarithme lorsqu'elle est 10 et on utilise un symbole particulier pour désigner un logarithme naturel.
On utilise donc la notation suivante :
- $\log_{10} x$ s'écrit $\log x$;
- $\log_e x$ s'écrit $\ln x$.

D) Équivalences logarithmiques

Certaines équivalences permettent d'effectuer des opérations qui font intervenir des logarithmes.
Pour m, n et c supérieurs à 0 et $c \neq 1$, on a :

Équivalences	**Exemples**
Logarithme d'un produit : $\boldsymbol{\log_c mn = \log_c m + \log_c n}$	$\log_2 6 \cdot 7 = \log_2 6 + \log_2 7$
Logarithme d'un quotient : $\boldsymbol{\log_c \frac{m}{n} = \log_c m - \log_c n}$	$\log_4 \frac{2}{3} = \log_4 2 - \log_4 3$
Logarithme d'une puissance : $\boldsymbol{\log_c m^n = n \log_c m}$	$\log_5 8 = \log_5 2^3 = 3 \log_5 2$
Changement de base : $\boldsymbol{\log_n m = \frac{\log_c m}{\log_c n}}$	$\log_8 9 = \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 8} = \frac{\log 9}{\log 8}$

L'équivalence du changement de base permet de calculer le logarithme d'un nombre dans n'importe quelle base.

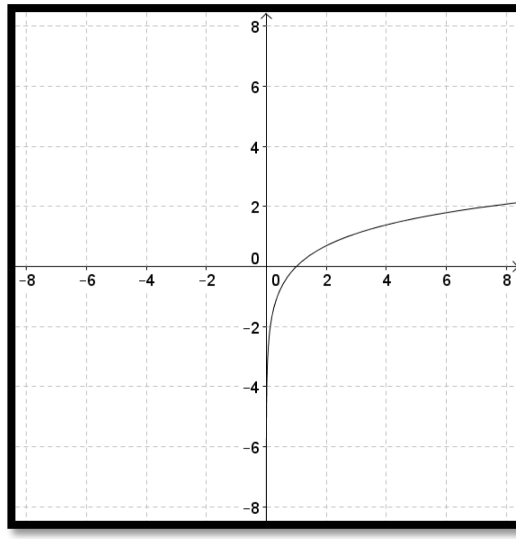
E) Fonction logarithmique

La réciproque d'une fonction exponentielle correspond à une fonction logarithmique.

La règle d'une fonction logarithmique peut s'écrire sous la forme $f(x) = a \log_c b(x-h) + k$, où $a \neq 0$, $b \neq 0$ et où la base c est un nombre supérieur à 0 et différent de 1.

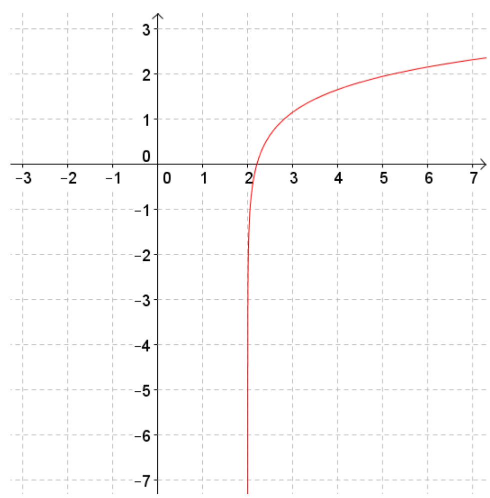
Toutefois, certaines manipulations algébriques permettent de transformer cette règle et de l'écrire sous la forme canonique réduite $f(x) = \log_c b(x-h)$.

Dans la représentation graphique d'une fonction logarithmique dont la règle s'écrit $f(x) = \log_c b(x-h)$, la courbe passe par le point de coordonnées $(\frac{1}{b} + h, 0)$ et l'une de ses extrémités se rapproche de plus en plus d'une asymptote verticale d'équation $x = h$.



Exemple :

Soit la fonction $(x) = \log_4 5(x-2)$.

<table>
<tr><th>Règle</th><th>Table de valeurs</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr><td>$f(x) = \log_4 5(x-2)$</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>3</td><td>$\approx 1{,}16$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\approx 1{,}66$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\approx 1{,}95$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\approx 2{,}16$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$\approx 2{,}32$</td></tr>
</table>
</td><td>
</td></tr>
</table>

1) Recherche de la règle d'une fonction logarithmique

Il est possible de déterminer la règle d'une fonction logarithmique sous la forme canonique de la manière suivante.

1. Trouver l'équation de l'asymptote verticale, l'abscisse à l'origine de la courbe et les coordonnées d'un point autre que celui associé à l'abscisse à l'origine.

2. Déterminer la valeur du paramètre h et celle du paramètre b.

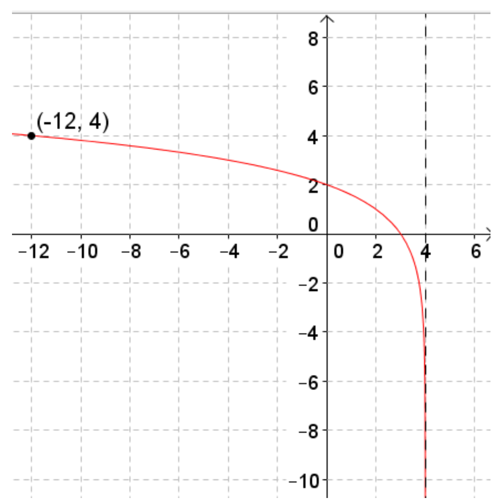
3. Substituer les coordonnées du point à x et à f(x) dans la règle $f(x) = \log_c b(x-h)$.

4. Résoudre l'équation formée afin de déterminer la base de la fonction.

5. Écrire la règle de la fonction obtenue.

Exemple :

Soit la représentation graphique suivante :



Trouvez la règle.

1. L'équation de l'asymptote verticale est $x = 4$, l'abscisse à l'origine est 3 et la courbe passe par le point $(-12, 4)$.

2. Puisque l'équation de l'asymptote verticale est $x = 4$, on déduit que $h = 4$.

   Puisque l'abscisse à l'origine est égale à $\frac{1}{b} + h$, on a :
   $$\frac{1}{b} + 4 = 3$$
   $$\frac{1}{b} = -1$$
   $$1 = -b$$
   $$b = -1$$

3. Substituer :
   $$4 = \log_c -1(-12-4)$$

4. Résoudre :
   $$4 = \log_c -1(-12-4)$$
   $$4 = \log_c -1(-16)$$
   $$4 = \log_c 16$$
   $$c^4 = 16$$
   $$c = 2$$

5. La règle de la fonction est :
   $$f(x) = \log_2 -1(x-4)$$

2) Résolution d'une équation logarithmique à une variable

Il est possible de résoudre une équation logarithmique à une variable de la façon suivante.

1. Obtenir une équation dans laquelle le logarithme est isolé.
    a. Pour cela, il faudra résoudre directement ou déterminer le zéro de la fonction.

2. Passer de la forme d'écriture logarithmique à la forme d'écriture exponentielle et résoudre l'équation ainsi obtenue.

Exemple :
Résoudre : $3\log_6 7x = 2$

$$3\log_6 7x = 2$$
$$\log_6 7x = \frac{2}{3}$$
$$6^{2/3} = 7x$$
$$x \approx 0{,}47$$

3) Résolution d'une inéquation logarithmique à une variable

Il est possible de résoudre une inéquation logarithmique à une variable de la façon suivante.

1. Substituer un symbole d'égalité au symbole d'inégalité de l'inéquation.

2. Résoudre l'équation

3. Déduire l'ensemble solution de l'inéquation en tenant compte de la restriction de positivité de l'argument.

Exemple :
Résoudre l'inéquation suivante : $-5\log_3 -3x \geq -10$

1. Substituer :

$$-5\log_3 -3x = -10$$

2. Résoudre :

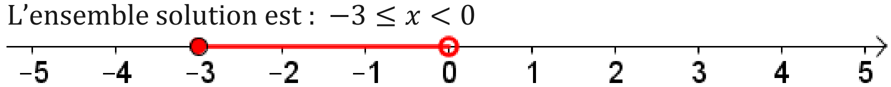
$$-5\log_3 -3x = -10$$
$$\log_3 -3x = 2$$
$$3^2 = -3x$$
$$9 = -3x$$
$$x = -3$$

3. Déduire l'ensemble solution :

L'argument d'un logarithme doit être supérieur à 0. Donc, on a :

$$-3x > 0$$
$$x < 0$$

Sur la droite numérique, les nombres supérieurs ou égaux à -3 et inférieurs à 0 vérifient l'inéquation. L'ensemble solution est : $-3 \leq x < 0$



F) *Résolution des équations et inéquations exponentielles à une variable à l'aide des logarithmes*

1) Résolution d'une équation exponentielle à une variable

Il est aussi possible de résoudre une équation exponentielle à une variable de la façon suivante.

1. Obtenir une équation dans laquelle la base affectée de l'exposant qui comporte la variable est isolée. Noter que la résolution ne peut se poursuivre que si le membre formé du terme constant est positif.
    a. Pour cela, il faudra résoudre directement ou déterminer le zéro de la fonction.

2. Passer de la forme d'écriture exponentielle à la forme d'écriture logarithmique et résoudre l'équation ainsi obtenue.

Certaines équivalences logarithmiques permettent de résoudre des équations qui font intervenir plusieurs expressions exponentielles.

Exemples :

a) Résoudre : $2(3)^{x-5} = 48$

$$2(3)^{x-5} = 48$$
$$(3)^{x-5} = 24$$
$$\frac{3^x}{3^5} = 24$$
$$3^x = 3^5 \cdot 24$$
$$3^x = 5832$$
$$x = \log_3 5832$$
$$x = \frac{\log 5832}{\log 3}$$
$$x \approx 7{,}89$$

b) Résoudre : $3^{x-4} = 5^{2x}$

$$3^{x-4} = 5^{2x}$$
$$\frac{3^x}{3^4} = 5^{2x}$$
$$3^x = 81 \cdot 5^{2x}$$
$$3^x = 81 \cdot 25^x$$
$$\frac{3^x}{25^x} = 81$$
$$\left(\frac{3}{25}\right)^x = 81$$
$$x = \log_{(3/25)} 81$$
$$x \approx -2{,}07$$

2) Résolution d'une inéquation exponentielle à une variable

Il est possible de résoudre une inéquation exponentielle à une variable de la façon suivante.

1. Substituer un symbole d'égalité au symbole d'inégalité de l'inéquation.

2. Résoudre l'équation

3. Représenter la solution sur une droite numérique par un point plein ou vide selon que l'équation fait partie ou non de l'inéquation.

4. Déduire l'ensemble solution de l'inéquation.

Exemple :

Résoudre l'inéquation suivante : $3(9)^{4-x} \geq 9^2$

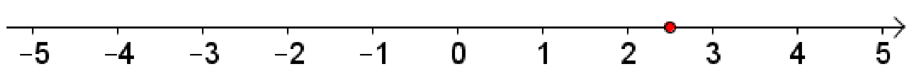
1. Substituer :

$$3(9)^{4-x} = 9^2$$

2. Résoudre :

$$3(9)^{4-x} = 9^2$$
$$3(9)^{4-x} = 81$$
$$(9)^{4-x} = 27$$
$$\frac{9^4}{9^x} = 27$$
$$\frac{6561}{27} = 9^x$$
$$243 = 9^x$$
$$x = \log_9 243$$
$$x = \frac{\log 243}{\log 9}$$
$$x = 2{,}5$$

3. Représenter la solution sur une droite :



4. Déduire l'ensemble solution :

   Sur la droite numérique, les nombres inférieurs ou égaux à 2,5 vérifient l'inéquation.
   L'ensemble solution est : $x \leq 2{,}5$